Soluzioni Prova Matematica IUSS 2024

Luca Ravasio

29 luglio 2026

Questa è la soluzione di una prova di matematica della IUSS che ho fatto per allenamento (2024). Se trovate un errore o pensate che possa essere fatta in maniera più elegate, scrivetemi pure a: 4vbwaikua@mozmail.com Thankssss!

Esercizio 1.

Bisogna contare le soluzioni in $\mathbb{R} - \{0\}$ di:

$$\ln\left(1 + 3|x| + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \ln(1 + 3|x| + x^2) = 0$$

Supponiamo che $x > 0$:

$$\ln\left(1 + 3x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x^2 + 3x + 1)$$

Controlliamo ora l'esistenza dei logaritmi:

$$x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2x > 0 \Rightarrow 1 + 3x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Per cui il primo logaritmo esiste per ogni $x > 0$. Lo stesso si può dire per il secondo perchè entrambe le radici di $x^2 + 3x + 1$ sono negative. Dunque, poichè il logaritmo nel suo dominio è biunivoco, possiamo dire:

$$1 + 3x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

Ora, con $x' = \frac{1}{x}$:

$$\sin(x') = \frac{1}{x'}$$

Ora, vistochè stiamo considerando $x > 0 \Leftrightarrow x' > 0$ bisogna notare che per valori di x' superiori a 2 questo accade due volte ogni periodo (perchè in ogni periodo il seno assume due volte tutti i valori in (-1, 1) e per $x' > 2\ \frac{1}{2} > x' > 0$). Dunque, poichè c'è un periodo di $\sin(x')$ ogni 2π e possiamo prendere x' grandi quanto vogliamo, ci sono infinite soluzioni. Dunque la risposta è che ci sono infinite soluzioni (credo siano $\aleph_0$).

Esercizio 2.

Punto 1.

Creiamo il sistema di congruenze lineari, con 626 numeri primi distinti:

$$\begin{cases} n+1 \equiv 0 \pmod{p_1} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{p_2} \\ n+2 \equiv 0 \pmod{p_3} \\ n+2 \equiv 0 \pmod{p_4} \\ n+3 \equiv 0 \pmod{p_5} \\ n+3 \equiv 0 \pmod{p_6} \\ \dots \\ n+313 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p_{626}) \end{cases}$$

Per il teorema cinese del resto questo sistema ha una soluzione (in realtà infinite, ma una in $\mathbb{N}$ ci basta), poichè i moduli $p_1, p_2, p_3 \dots$ sono tutti coprimi fra loro. Ora, se consideriamo i 313 numeri successivi a n:

- $n+1$ non è primo perchè multiplo di p_1 e p_2
- $n+2$ non è primo perchè è multiplo di p_3 e p_4

...
- $n+k$ non è primo perchè è multiplo di p_{2k-1} e $p_2 k \; \forall 1 \leq k \leq 313$

Perciò abbiamo 313 numeri consecutivi non primi □

Punto 2. Possiamo immaginare di creare un set di interi che va da 1 a 313, sia esso S_0. Esso contiene più di 10 numeri primi, come si può facilmente verificare. Ora, aggiungiamo il numero 314 e togliamo il numero 1, ottenendo l'insieme S_1. Poi proseguiamo e togliamo il numero 2 e aggiungiamo il numero 315, ottenendo l'insieme S_2. Ogni volta che passiamo da S_n a S_{n+1} il numero di primi contenuti nell'insieme può scendere al massimo di uno, poichè togliamo un solo intero. Ora, dopo molti passaggi arriveremo inevitabilmente ai 313 numeri consecutivi non primi precedentemente descritti. Perciò ora in S_k abbiamo 0 numeri primi. Perciò tra S_0 e S_k ci sarà sicuramente almeno un S_x con esattamente 10 numeri primi, poichè il numero di numeri primi è sceso da un valore più alto di 10 a zero e in ogni passaggio può scendere solo di uno. □

Esercizio 3.

Questo è un banale esercizio di sostituzione.

$$\frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+2d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+2d}\right)+2d} = x$$

$$\frac{a^2x+ab+bcx+2bd}{acx+bc+2cdx+4d^2} = x$$

$$a^2x+ab+bcx+2bd = acx^2+bcx+2cdx^2+4d^2x$$

Da cui:

$$\begin{cases} 0 = ac+2cd \\ a^2+bc = bc+4d^2 \Rightarrow a = -2d \\ ab+2bd = 0 \end{cases}$$

Quindi la condizione è $a = -2d$. Questo geometricamente fa senso. infatti:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+2d}$$

E' un'iperbole. Ha come asintoto orizzontale $y = \frac{a}{c}$ e come asintoto verticale $x = -\frac{2d}{c}$. Affinchè una funzione sia involutoria è necessario che sia simmetrica rispetto a $y = x$. Affinchè un'iperbole sia simmetrica rispetto a $y = x$ è necessario che il suo centro (che si trova all'intersezione degli asintoti) si trovi su $y = x$. Dunque $-\frac{2d}{c} = \frac{a}{c}$

Esercizio 4.

Basta un po' di pazienza.

Punto 1.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}\right)^2 - 2\left(\frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1x_2x_3}\right) = \frac{129}{16}$$

Punto 2.

Utilizziamo le formule di Vietè:

$$p(x) = k\left(x - \frac{1}{x_1^2}\right)\left(x - \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x - \frac{1}{x_3^2}\right) =$$

$$p(x) = k\left(x^3 - \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{x_3^2x_1^2} + \frac{1}{x_2^2x_1^2} + \frac{1}{x_2^2x_3^2}\right)x - \frac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2}\right)$$

Ora:

$$\frac{1}{x_3^2x_1^2} + \frac{1}{x_2^2x_1^2} + \frac{1}{x_2^2x_3^2} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2} = \frac{33}{2}$$

Quindi otteniamo la famiglia di polinomi:

$$p(x) = k\left(x^3 - \frac{129}{16}x^2 + \frac{33}{2}x - 1\right)$$

Punto 3.

$$(x_1 - w)^2 + (x_2 - w)^2 + (x_3 - w)^2 = \frac{27}{2}$$

$$x_1^2 - 2x_1w + w^2 +$$

$$x_2^2 - 2x_2w + w^2 +$$

$$x_3^2 - 2x_3w + w^2 = \frac{27}{2}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 2(x_1 + x_2 + x_3)w + 3w^2 = \frac{27}{2}$$

$$9 - 2\left(-\frac{15}{4}\right) - 2(-3)w + 3w^2 = \frac{27}{2}$$

$$9 - 2\left(-\frac{15}{4}\right) - 2(-3)w + 3w^2 = \frac{27}{2}$$

Da cui: $w = -1$ è l'unico numero di questo tipo.

Esercizio 5.

Punto 1. Sì, φ è suriettiva.

Supponiamo per assurdo che φ non sia suriettiva e che si sia un elemento P' senza controimmagine. Congiungiamo ora i vertici di P' in modo da ottenere quattro triangoli. Specchiamo ora questi quattro triangoli attorno al lato esterno che coincide con uno dei quattro lati di P'. In questo modo abbiamo trovato un $P \in X \mid \varphi(P) = P'$ assurdo.

Punto 2. L'insieme dei quadrati soddisfa la proprietà richiesta. Infatti congiungendo i punti medi di un quadrato si ottiene un altro quadrato e i quadrati sono tutti simili tra loro.

Punto 3.

Dimostriamo alcuni teoremi preliminari:

Lemma 5.1:

$$\operatorname{per}\big(\varphi^2(P)\big) = \operatorname{per}(P)/2$$

Dimostrazione: Per similitudine tra P e $\varphi^2(P)$ e teorema di Talete. □

Lemma 5.2:

$$\frac{\operatorname{per}\big(\varphi^{2k+1}(P)\big)}{\operatorname{per}(\varphi^{2k}(P))}$$

è costante e diverso da 1

Dimostrazione: Anche queste segue per similitudine e per il fatto che $\varphi^{2k+1}(P)$ è contenuto in $\operatorname{per}\big(\varphi^{2k}(P)\big)$ □

Ora, supponiamo che n sia pari: $n = 2k$. Si ricava:

$$a_{2k} = \frac{2^k}{7} \operatorname{per}\big(\varphi^{2k}(P)\big)$$

Ora, siccome per il Lemma 5.1 $\operatorname{per}\big(\varphi^{2n}(P)\big) = \operatorname{per}(P) \cdot \frac{1}{2^n}$:

$$a_{2k} = \frac{2^k}{7} \operatorname{per}(P) \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{\operatorname{per}(P)}{7}$$

Se invece n è dispari: $n = 2k + 1$. Si ricava:

$$a_{2k+1} = \frac{2^k}{7} \operatorname{per}\big(\varphi^{2k+1}(P)\big)$$

Da cui, analogamente, per il Lemma 5.1 e Lemma 5.2:

$$a_{2k+1} = \frac{2^k}{7} \operatorname{per}(P) \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{\operatorname{per}(P)}{7 \cdot k}$$

Per cui la serie descritta continua ad oscillare tra due valori fissati, è periodica, non asintottica (per il Lemma 5.2 k è costante e diverso da 1).

Punto 4.

Sì, è iniettiva.

Supponiamo infatti che esistano due parallelogrammi P_1, P_2 tali che: $\varphi(P_1) = P, \varphi(P_2) = P$. Adesso, sia ogni coppia di lati opposti di P_1 deve essere parallela alla retta che congiunge i punti medi dell'altra coppia di lati di P_1 (possiamo infatti trovare una traslazione che fa corrispondere i due vertici di uno dei due lati ai punti medi dell'altra coppia di lati, e per due punti passa una e una sola retta). Lo stesso vale per P_2. Tuttavia il parallelismo è una classe di equivalenza, gode della proprietà transitiva, quindi le coppie di lati opposti di P_1 sono parallele alle rispettive coppie di lati opposti di P_2. Ma poichè i lati di P_1 e P_2 devono passare per i vertici di P ed esiste una sola retta passante per un punto e parallela ad una retta data e due rette hanno al più un'intersezione i vertici di P_1 e P_2 coincidono, assurdo. □