Soluzioni Prova Matematica IUSS 2025

Luca Ravasio

29 luglio 2026

Questa è la soluzione di una prova di matematica della IUSSche ho fatto per allenamento (2025). Se trovate un errore o pensate che possa essere fatta in maniera più elegate, scrivetemi pure a: 4vbwaikua@mozmail.com Thankssss!

Esercizio 1.

Dimostriamo un teorema preliminare:

Teorema 1.1: Sia P un punto interno ad un triangolo equilatero. La somma delle distanze di P dai lati del triangolo è indipendente dalla scelta di P ed è pari a $l\frac{\sqrt{3}}{2}$, dove l è il lato del triangolo.

Dimostrazione: Connettendo P ai vertici del triangolo equilatero è possibile dividere il triangolo equilatero in tre sotto-triangoli. La somma delle aree dei tre sotto-triangoli è uguale a quella del triangolo iniziale (sono una partizione del triangolo iniziale). Dunque:

$$\frac{l \cdot l\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l \cdot h_1}{2} + \frac{l \cdot h_2}{2} + \frac{l \cdot h_3}{2}$$

Da cui:

$$l\frac{\sqrt{3}}{2} = h_1 + h_2 + h_3$$

□

Inoltre possiamo trovare la seguente relazione semplificata per $\lambda_1(P), \lambda_2(P), \lambda_3(P)$:

Lemma 1.1:

$$\lambda_x = \frac{\frac{l \cdot h_x}{2}}{l^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{h_x}{l\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{h_x}{H}$$

Ora possiamo risolvere i vari punti del problema.

Punto 1.

Utilizzando l'espressione trovata per λ_x:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2\lambda_3 = \frac{h_1}{H} + 2\frac{h_2}{H} \cdot \frac{h_3}{H} = 3$$

Da cui:

$$h_1 + 2\frac{h_2 \cdot h_3}{H} = 3H$$

Ora, dimostriamo che il membro a sinistra è sempre più piccolo. Sostituiamo h_3 con qualcosa di più grande e dimostriamo che è comunque più piccolo di $3H$:

$$h_1 + 2\frac{h_2 \cdot h_3}{H} < h_1 + 2h_2 < 3H = 3h_1 + 3h_2 + 3h_3$$

$$0 < 2h_1 + h_2 + 3h_3 \Rightarrow h_1 + 2h_2 < 3H$$

Qui abbiamo sostituito H sfruttando il Teorema 1.1. Siccome qualcosa di sicuramente più grande dell'espressione data è sicuramente più piccola di $3H$ (eccetto nel caso degenere in cui il triangolo ha lato 0) segue la tesi. □

Punto 2.

Il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow h_2 = h_3 \\ \frac{h_1}{H} = 2\frac{h_2}{H} \cdot \frac{h_3}{H} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} h_2 = h_3 \\ h_1 = 2\frac{h_2 \cdot h_3}{H} \end{cases} \Rightarrow h_1 = 2\frac{h_2^2}{h_1 + 2h_2} \Rightarrow h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_2^2 = 0$$

Da ciò segue che:

$$h_1 = h_2\left(-1 + \sqrt{3}\right) \quad \text{(deve essere per forza positivo, l'altra radice la scartiamo)}$$

Da qui, sfruttando il Teorema 1.1

$$h_2\left(-1 + \sqrt{3}\right) + h_2 + h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Dunque per h_2c'è una sola sol. Da quanto detto precedentemente segue che anche per h_1 e h_3 c'è una sola sol. □

Punto 3.

Affinchè il valore dell'esponenziale sia massimo è necessario che il valore dell'esponente sia massimo. L'esponente è uguale a:

$$\frac{h_1}{H} \cdot \frac{h_2}{H} \cdot \frac{h_3}{H}$$

Dunque proporzionale a $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$. Tuttavia per il Teorema 1.1 sappiamo che la loro somma è fissata. E' dunque noto che in questi casi si ottiene il massimo se $h_1 = h_2 = h_3$ (se si dubita di questo vedere Teorema 1.2). Dunque per ottenere il massimo P si deve trovare al centro del triangolo (esiste un unico punto equidistante da tutti i lati, il baricentro). □

Teorema 1.2: Quanto detto precedentemente

Dimostrazione:

$$\max x \cdot y \cdot z = \max x \cdot y \cdot (S - x - y) \quad \text{dove} \quad S = x + y + z$$

Dunque si ricava che cerchiamo il massimo di:

$$xyS - x^2y - xy^2$$

Dove S è una costante. Imponiamo il gradiente a zero per trovare i punti stazionari:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xyS - x^2y - xy^2) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(xyS - x^2y - xy^2) = 0$$

Da ciò si ricava:

$$x = \frac{S - y}{2}$$
$$y = \frac{S - x}{2}$$

Da cui si ricava $x = y = \frac{S}{3}$ da cui si ricava la tesi sottraendo da S x e y. □

Esercizio 2.

Punto 1.

Dimostrazione: $f(-2x) = f(2x)$ significa che f è pari. Per le funzioni pari:

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(-x-\delta) - f(-x)}{\delta} = -f'(-x)$$

Affinchè f' non sia mai negativo non può essere mai nemmeno positivo, quindi la funzione deve essere costante. □

Punto 2.

Dimostrazione: Dire che $f(-x-3) = -f(x+3)$ significa dire che la funzione è dispari. Una proprietà delle funzioni dispari è che il loro grafico ha una simmetria centrale per $(0, 0)$. Ciò significa tra l'altro che:

$$f'(-x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(-x+\delta) - f(-x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x) - f(x-\delta)}{\delta} = f'(x)$$

Perciò:

$$f'(x)f(4x) + f'(-x)f(-4x) = f'(x)f(4x) + (f'(x))(-f(4x)) = 0$$

□

Punto 3.

Dimostrazione: Se $x \geq y$ la relazione rimane così com'è, altrimenti:

$$(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq 3(y - x)^2$$

Questa è esattamente la stessa relazione con x e y scambiate, quindi possiamo assumere senza perdita di generalità che $x \geq y$. Se $x = y$ la relazione segue banalmente, quindi supponiamo che $x > y$. Perciò possiamo dividere entrambi i membri per $x - y$:

$$f'(x) - f'(y) \geq 3(x - y)$$

Imponiamo che $x = 0$:

$$f'(0) - f'(y) \geq 3(0 - y) = -3y$$

Da cui:

$$3y + f'(0) \geq f'(y)$$

Visto che è crescente $f'(y) \geq 0$, da cui:

$$3y + f'(0) \geq 0$$

Ma per $y \to -\infty$ questo è impossibile, indipendentemente da quanto è grande $f'(0)$ (che per le ipotesi di derivabilità è finito). □

Esercizio 3.

Punto 1. Poichè una funzione esponenziale del tipo a^x e una retta del tipo $-x$ hanno una sola intersezione (come si può intuire graficamente) basta trovare un numero e verificare che funziona. Questo numero è $x = -\frac{1}{3}$, come si può facilmente verificare:

$$27^{-\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot (-\frac{1}{3})} = 3^{-1} = -\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Punto 2. Le funzioni esponenziali sono sempre positive se la base è positiva. Se la base è negativa sono definite solo per esponenti interi. Dunque $x^2 - 9x + 13$ deve essere negativa e $x^2 - 6x + 1$ deve essere intera. Inoltre il risultato di un esponenziale può essere −1 solo se l'esponente è dispari e la base è −1. Dunque possiamo prendere la seconda di queste condizioni, ottenendo un eq. di secondo grado con due sol:

$$x^2 - 9x + 13 = -1 \Rightarrow x = 2 \vee x = 7$$

Solo in questi due casi POTREMMO ottenere −1. Verifichiamolo:

$$x = 2 : x^2 - 6x + 1 = -7 \quad \text{dispari, otteniamo -1}$$
$$x = 7 : x^2 - 6x + 1 = 8 \quad \text{pari, purtoppo non otteniamo -1}$$

Perciò l'unica sol è $x = 2$.

Esercizio 4.

Punto 1.

Dimostriamo induttivamente che $-1 < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Passo base: $u_0 = 0 > -1$

Passo induttivo: Mostriamo che la condizione $-1 < u_n$ implica che $-1 < u_{n+1}$

$$-1 < u_n \Rightarrow 0 < 3u_n + 3 \Rightarrow -2u_n - 5 < u_n - 2$$

Da cui, siccome $-1 < u_n \Rightarrow 2u_n + 5 > 0$:

$$-2u_n - 5 < u_n - 2 \Rightarrow -1 < \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} = u_{n+1}$$

Ora dimostriamo che la funzione è decrescente:

$$(u_n+1)^2 \geq 0 \Rightarrow u_n^2+2u_n+1 \geq 0 \Rightarrow 2u_n^2+4u_n+2 \geq 0 \Rightarrow 2u_n^2+5u_n \geq u_n-2$$

Da cui, siccome $2u_n+5>0$ perchè $u_n>-1$:

$$2u_n^2+5u_n \geq u_n-2 \Rightarrow u_n \geq \frac{u_n-2}{2u_n+5}=u_{n+1}$$

Punto 2.

Sappiamo che:

$$v_n=\frac{6}{1+u_n} \tag{4.1}$$

Possiamo ora ricavare u_n da v_n:

$$u_n=\frac{6}{v_n}-1 \tag{4.2}$$

Ora, la formula di v_{n+1} è:

$$v_{n+1}=\frac{6}{1+u_{n+1}}=\frac{6}{1+\frac{u_n-2}{2u_n+5}}$$

Da cui, applicando la formula (4.2):

$$v_{n+1}=\frac{6}{1+\frac{\frac{6}{v_n}-3}{\frac{12}{v_n}+3}}=\frac{6}{1+\frac{2-v_n}{4+v_n}}=\frac{6(4+v_n)}{4+v_n+2-v_n}=4+v_n$$

Perciò, visto che dalla formula (4.1) si ricava che $v_0=6$, l'espressione di $v_n=6+4n$

Punto 3.

Sostituendo l'espressione trovata per v_n:

$$w_n=e^{3-(6+4n)}=e^{-3-4n}=e^{-3}\cdot e^{-4n}$$

Ora, $w_0=e^{-3}$.

Esercizio 5.

Punto 1.

$$f(x)=6\sin^2 x+5\cos x+4=-6\cos^2 x+5\cos x+10=-6t^2+5t+10$$

Il massimo si trova in $t_{\max}=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{12}$, dunque in $x=\arccos\left(\frac{5}{12}\right)\approx 1.14$. Il massimo che si ottiene in quel punto si calcola direttamente dall'espressione $f(x)=-6t^2+5t+10=\frac{265}{24}$.

Punto 2. No, perchè l'arcoseno è biunivoco in $0<x<\pi$, quindi solo il coseno di $\arccos\left(\frac{5}{12}\right)$ è uguale a $\frac{5}{12}$ in quell'intervallo.

Esercizio 6.

Punto 1. Sì, se $k=0$ il polinomio ha solo due soluzioni reali, quindi esiste un valore di k di questo tipo.

Punto 2.

Facciamo un raccoglimento:

$$p(x) = x^4 - \left(k^2x^2 - 2kx + 1\right) = x^4 - (kx - 1)^2$$

Da cui, otteniamo una radice se:

$$x^4 = (kx - 1)^2 \Leftrightarrow \pm x^2 = kx - 1$$

Possiamo immaginare di disegnare sul piano cartesiano le due parabole e il fascio di rette $kx - 1$. La parabola $-x^2$ sicuramente ha 2 intersezioni perchè il fascio di rette passa per $(0, -1)$. La parabola x^2 invece può averne $0, 1, 2$. Si ricava:

$$\begin{cases} y = kx - 1 \\ y = x^2 \end{cases} \text{ ha una sola soluzione } \quad x \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Da cui, tenendo in considerazione il grafico:

$$\begin{array}{ll} \text{se: } & k < -2 \qquad\qquad \to 4 \text{ sol} \\ \text{se: } & k = -2 \qquad\qquad \to 3 \text{ sol} \\ \text{se: } & -2 < x < 2 \qquad \to 2 \text{ sol} \\ \text{se: } & k = 2 \qquad\qquad \to 3 \text{ sol} \\ \text{se: } & 2 < k \qquad\qquad \to 4 \text{ sol} \end{array}$$